

Bài giảng Toán cao cấp B1

Trần Bảo Ngọc

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học,
Trường Đại học Nông Lâm TP. Hồ Chí Minh

Giới thiệu : Quy định môn học

Cách tính điểm kết thúc môn học

- Điểm giữa kỳ : 30% điểm kết thúc môn học.
- Điểm cuối kỳ : 70% điểm kết thúc môn học.
- Sinh viên vắng từ 50% số tiết học sẽ nhận điểm 0 giữa kỳ và trừ 1 điểm vào điểm kết thúc môn học.

Cấu trúc đề thi cuối kỳ

- 15 câu Trắc nghiệm $\times 0,4$ điểm = 6,0 điểm.
- 2 câu Tự luận $\times 2,0$ điểm = 4,0 điểm.

Giáo trình, bài giảng và tài liệu tham khảo

- GT. Toán cao cấp B1, Ngô Thiện - Đặng Thành Danh.
- BG. Toán cao cấp B1, Trần Bảo Ngọc.

Giới thiệu : Nội dung chính của môn học

Chương 1. Hàm số, Giới hạn và Liên tục.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân.

Chương 3. Tích phân bất định, Tích phân xác định và Ứng dụng của tích phân xác định.

Chương 4. Chuỗi số.

Chương 1.

Hàm số, Giới hạn và Liên tục

1.1. Các hàm số thực quan trọng

a) Hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp tổng quát

- Hàm lũy thừa

Ví dụ : x^5 , $x^{-2} := \frac{1}{x^2}$, $x^{\frac{2}{3}} := \sqrt[3]{x^2}, \dots$

- Hàm mũ và logarit

Ví dụ :

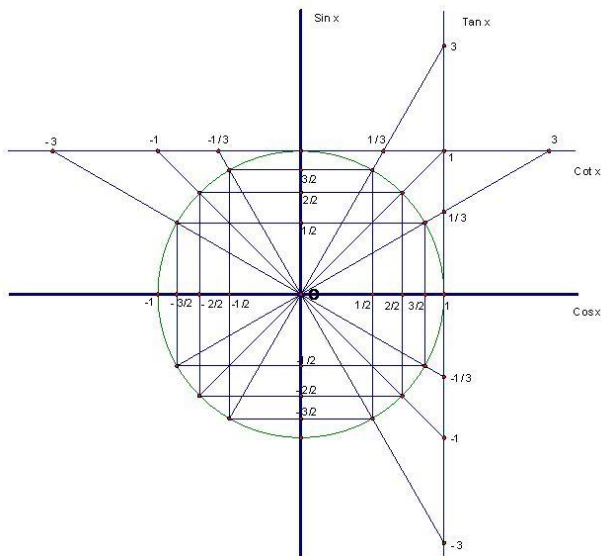
5^x , $2^{-x} := \frac{1}{2^x}$, $3^{2x} = (3^x)^2 = 9^x$, $3^x = e^{x \ln 3}, \dots$

- Hàm lượng giác

Ví dụ : $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

Hàm lũy thừa, mũ, logarit và lượng giác được gọi là các hàm sơ cấp cơ bản. **Hàm số sơ cấp tổng quát là hàm thu được bằng cách lấy tổng, hiệu, tích, thương, hợp của các hàm sơ cấp cơ bản.**

1.1. Các hàm số thực quan trọng



1.1. Các hàm số thực quan trọng

b) Các hàm số lượng giác ngược

$$\bullet y = \arcsin x \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$$

$$\bullet y = \arccos x \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \pi \\ x = \cos y \end{cases}$$

$$\bullet y = \arctan x \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ x = \tan y \end{cases}$$

$$\bullet y = \operatorname{arccot} x \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 0 < y < \pi \\ x = \cot y \end{cases}$$

1.2. Giới hạn hàm số

Các định nghĩa giới hạn và tính chất có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh :

Các quá trình (được xét trong môn Toán B1)

Ba quá trình thường gặp : $x \rightarrow a$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$. Ứng với 3 quá trình đó, ta thường xét các giới hạn ở dạng :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Các dạng vô định thường gặp

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0 \text{ và } 1^\infty.$$

1.2. Giới hạn hàm số

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn :

Tiêu chuẩn 1 - *Giới hạn kẹp*

Nếu $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ và $\lim u(x) = \lim v(x) = L$ trong một quá trình thì

$$\lim f(x) = L$$

cũng trong quá trình đó.

Tiêu chuẩn 2

Nếu $f(x)$ là một hàm số tăng và bị chặn trên (hoặc giảm và bị chặn dưới) trên khoảng (a,b) (hoặc $b = +\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$) tồn tại.

1.2. Giới hạn hàm số

Các hệ quả của tiêu chuẩn 1 và 2 :

Hệ quả 1

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Hệ quả 2

$$\lim [u(x)]^{v(x)} \text{ (có dạng } 1^\infty) = e^{\lim [u(x)-1] \cdot v(x)}.$$

1.2. Giới hạn hàm số

Một số trường hợp đặc biệt suy ra từ các hệ quả 1 và 2 :

Suy ra từ hệ quả 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Suy ra từ hệ quả 2

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}.$

1.3. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Ví dụ 1 : x , $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^α ($\alpha > 0$) là các VCB xét trong quá trình $x \rightarrow 0$.

Ví dụ 2 : $\frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$), q^x ($|q| < 1$) là các VCB xét trong quá trình $x \rightarrow +\infty$.

b) Tính chất

- $\lim \alpha(x) = L \iff \{\alpha(x) - L\}$ là một VCB.
- Nếu $\alpha(x)$ là một VCB và $|\beta(x)| \leq M$ thì $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ là một VCB.

1.3. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong *cùng quá trình*

- Nếu $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.
Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Chú ý

Nếu $\alpha(x)$ là một VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$.

1.3. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

d) Quá trình $u \rightarrow 0$ và VCB tương đương thường gặp

- $\sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim u.$
- $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}.$
- $\ln(1 + u) \sim (e^u - 1) \sim u.$

e) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ và VCB tương đương

Nếu $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \bar{\beta}(x)$ thì

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}.$$

1.4. Sự liên tục của hàm số

Nhắc lại

Nếu $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ thì

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ tồn tại và } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

a) Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

$$\begin{cases} i) f(a) \text{ xác định và} \\ ii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \end{cases}$$

1.4. Sự liên tục của hàm số

b) Điểm gián đoạn

Giá trị $x = a$ được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các dấu hiệu sau xảy ra

- $f(a)$ không xác định.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ không tồn tại.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Chú ý

Ta phân loại điểm gián đoạn thành 2 loại (tham khảo giáo trình). Các khái niệm hàm số liên tục trên một khoảng cũng như các tính chất cơ bản của hàm liên tục có thể xem trong giáo trình (tr. 32-34).

Hết chương 1.

2.1. Đạo hàm

Các định nghĩa đạo hàm, bảng công thức đạo hàm của các **hàm sơ cấp cơ bản** và cũng như đạo hàm hàm hợp có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh :

Đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Đạo hàm cấp cao $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$

Đạo hàm cấp cao của một tích : $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$

2.1. Đạo hàm

Đạo hàm cấp cao hàm lượng giác

- $(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^{n/2} \sin x & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cos x & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$
- $(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos x & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (-1)^{(n-1)/2} \sin x & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$

Đạo hàm cấp cao hàm lũy thừa và mũ

- $(xe^x)^{(n)} = (n+x)e^x.$
- $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-a)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$
- $[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{-(-a)^n (n-1)!}{(ax+b)^n}.$

2.2. Vi phân và ứng dụng

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 . Gọi Δx là số gia theo hoành độ tại x_0 . Đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Định nghĩa

Nếu $\Delta f = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$ với A là hằng số, $\alpha(\Delta x)$ là một VCB bậc cao hơn Δx xét trong quá trình $\Delta x \rightarrow 0$ thì ta nói :

- Hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 .
- Biểu thức $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 . Ký hiệu $df(x_0) = A.\Delta x$.

2.2. Vi phân và ứng dụng

Định lý cơ bản về vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ **khả vi** tại x_0 . Khi đó hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 , hơn nữa :

- $df(x_0) = f'(x_0). \Delta x.$
- $dx = \Delta x.$

Hệ quả - Ứng dụng vi phân tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Vi phân cấp cao

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0). dx^n.$$

2.3. Qui tắc L'Hospital và khử dạng vô định

Qui tắc L'Hospital

Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả vi trên một lân cận của x_0 và

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **tồn tại** thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\text{có dạng } \frac{0}{0} \text{ hoặc } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Chú ý

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **không tồn tại** thì ta không thể khẳng định

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tồn tại hay không tồn tại.

2.3. Qui tắc L'Hospital và khử dạng vô định

Khử các dạng vô định $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0

Đưa các dạng vô định này về dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ (được sử dụng quy tắc L'Hospital) như sau :

- $\infty - \infty$: Quy đồng đưa về dạng $\frac{0}{0}$.
- $0 \cdot \infty$: Viết thành $\frac{0}{(\frac{1}{\infty})}$ (dạng $\frac{0}{0}$) hoặc $\frac{\infty}{(\frac{1}{0})}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)
- 0^0 : Sử dụng công thức $a^b = e^{b \cdot \ln a}$ đưa về dạng $0 \cdot \infty$.