Bài giảng môn học

TOÁN CAO CẤP B1

ThS. Trần Bảo Ngọc

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học
Trường Đại học Nông Lâm TP HCM

Học kỳ 3, Năm học 2012-2013

Giới thiệu : Quy định môn học

Cách tính điểm kết thúc môn học

- Điểm giữa kỳ : 30% điểm kết thúc môn học.
- Điểm cuối kỳ : 70% điểm kết thúc môn học.
- Sinh viên vắng từ 50% số tiết học sẽ nhận điểm 0 giữa kỳ và trừ 1 điểm vào điểm kết thúc môn học.

Cấu trúc đề thi cuối kỳ

- 15 cầu Trắc nghiệm $\times$ 0,4 điểm = 6,0 điểm.
- 2 câu Tự luận $\times$ 2,0 điểm = 4,0 điểm.

Giáo trình, bài giảng và tài liệu tham khảo

- GT. Toán cao cấp B1, Ngô Thiện - Đặng Thành Danh.
- BG. Toán cao cấp B1, Trần Bảo Ngọc.

Giới thiệu : Nội dung chính của môn học

Chương 1. Hàm số, Giới hạn và Liên tục.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân.

Chương 3. Tích phân bất định, Tích phân xác định và Ứng dụng của tích phân xác định.

Chương 4. Chuỗi số.

Chương 1.

Hàm số, Giới hạn và Liên tục

"Trên bước đường thành công, không có dấu chân của kẻ lười biếng."

Ngạn ngữ phương Đông.

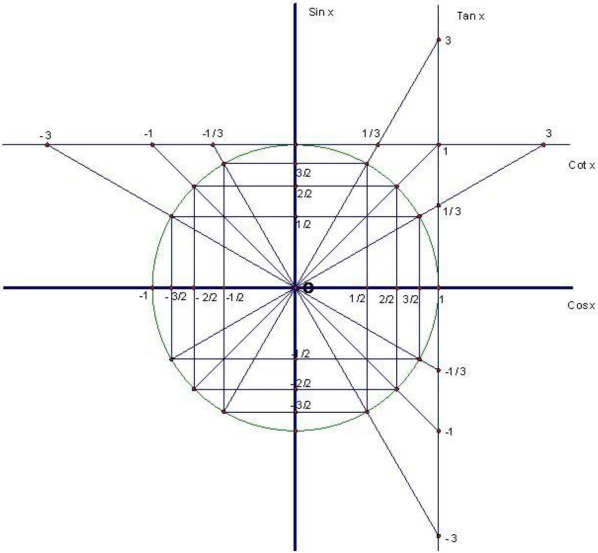
1.1. Các hàm số thực quan trọng

a) Hàm số sơ cấp cơ bản và hàm số sơ cấp tổng quát

- Hàm lũy thừa
  Ví dụ : $x^5, \quad x^{-2} := \dfrac{1}{x^2}, \quad x^{\frac{2}{3}} := \sqrt[3]{x^2}, \ldots$
- Hàm mũ và logarit
  Ví dụ :
  $5^x, \quad 2^{-x} := \dfrac{1}{2^x}, \quad 3^{2x} = (3^x)^2 = 9^x, \quad 3^x = e^{x \ln 3}, \ldots$
- Hàm lượng giác
  Ví dụ : $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.

Hàm lũy thừa, mũ, logarit và lượng giác được gọi là các hàm sơ cấp cơ bản. **Hàm số sơ cấp tổng quát là hàm thu được bằng cách lấy tổng, hiệu, tích, thương, hợp của các hàm sơ cấp cơ bản.**

1.1. Các hàm số thực quan trọng



1.1. Các hàm số thực quan trọng

b) Các hàm số lượng giác ngược

- $y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$
- $y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \pi \\ x = \cos y \end{cases}$
- $y = \arctan x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ x = \tan y \end{cases}$
- $y = \mathrm{arccot}\, x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 0 < y < \pi \\ x = \cot y \end{cases}$

1.2. Giới hạn hàm số

Các định nghĩa giới hạn và tính chất có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh :

Các quá trình (được xét trong môn Toán B1)

Ba quá trình thường gặp : $x \to a$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$. Ứng với 3 quá trình đó, ta thường xét các giới hạn ở dạng :

$$\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Các dạng vô định thường gặp

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, 0.\infty, 0^0 \text{ và } 1^\infty.$$

1.2. Giới hạn hàm số

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn :

Tiêu chuẩn 1 - *Giới hạn kẹp*

Nếu $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ và $\lim u(x) = \lim v(x) = L$ trong một quá trình thì

$$\lim f(x) = L$$

cũng trong quá trình đó.

Tiêu chuẩn 2

Nếu $f(x)$ là một hàm số tăng và bị chặn trên (hoặc giảm và bị chặn dưới) trên khoảng (a,b) (hoặc $b = +\infty$) thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$) tồn tại.

1.2. Giới hạn hàm số

Các hệ quả của tiêu chuẩn 1 và 2 :

Hệ quả 1

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Hệ quả 2

$$\lim\,[u(x)]^{v(x)}\ (\text{ có dạng } 1^{\infty}) = e^{\lim[u(x)-1].v(x)}.$$

1.2. Giới hạn hàm số

Một số trường hợp đặc biệt suy ra từ các hệ quả 1 và 2 :

Suy ra từ hệ quả 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x} = a \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Suy ra từ hệ quả 2

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ và $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{e}$.
- $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x} = e$ và $\lim\limits_{x\to \infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x} = \dfrac{1}{e}$.

1.3. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Ví dụ 1 : x, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^α $(\alpha > 0)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to 0$.

Ví dụ 2 : , $\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, q^x $(|q| < 1)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to +\infty$.

b) Tính chất

- $\lim \alpha(x) = L \Longleftrightarrow \{\alpha(x) - L\}$ là một VCB.
- Nếu $\alpha(x)$ là một VCB và $|\beta(x)| \le M$ thì $\alpha(x).\beta(x)$ là một VCB.

1.3. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong ***cùng quá trình***

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.
  Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Chú ý

Nếu $\alpha(x)$ là một VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$.

1.3. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

d) Quá trình $u \to 0$ và VCB tương đương thường gặp

- $\sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim u$.
- $1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2}$.
- $\ln(1+u) \sim (e^u - 1) \sim u$.

e) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và VCB tương đương

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ thì

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

1.4. Sự liên tục của hàm số

Nhắc lại

Nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ thì

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ tồn tại và } \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

a) Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

$$\begin{cases} i) \;\; f(a) \text{ xác định và} \\ ii) \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a). \end{cases}$$

1.4. Sự liên tục của hàm số

b) Điểm gián đoạn

Giá trị $x = a$ được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các dấu hiệu sau xảy ra

- $f(a)$ không xác định.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ không tồn tại.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Chú ý

Ta phân loại điểm gián đoạn thành 2 loại (tham khảo giáo trình). Các khái niệm hàm số liên tục trên một khoảng cũng như các tính chất cơ bản của hàm liên tục có thể xem trong giáo trình (tr. 32-34).

Chương 2.

Đạo hàm và vi phân

"Ngủ dậy muộn thi phí mất cả ngày, ở tuổi thanh niên mà không học tập thì phí mất cả cuộc đời."

Ngạn ngữ phương Đông.

2.1. Đạo hàm

Các định nghĩa đạo hàm, bảng công thức đạo hàm của các **hàm sơ cấp cơ bản** và cũng như đạo hàm hàm hợp có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh :

Đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\mathrm{arccot}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Đạo hàm cấp cao $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$

Đạo hàm cấp cao của một tích : $(f.g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n)} g^{(n-k)}$.

2.1. Đạo hàm

Đạo hàm cấp cao hàm lượng giác

- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Đạo hàm cấp cao hàm lũy thừa và mũ

- $(xe^x)^{(n)} = (n + x)e^x.$
- $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-a)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$
- $[\ln(ax+b)]^{(n)} = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^{(n-1)} = a\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n-1)}.$

2.2. Vi phân và ứng dụng

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0. Gọi Δx là số gia theo hoành độ tại x_0. Đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Định nghĩa

Nếu $\Delta f = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$ với A là hằng số, $\alpha(\Delta x)$ là một VCB bậc cao hơn Δx xét trong quá trình $\Delta x \to 0$ thì ta nói :

- Hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0.
- Biểu thức $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x_0. Ký hiệu $df(x_0) = A.\Delta x$.

2.2. Vi phân và ứng dụng

Định lý cơ bản về vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ **khả vi** tại x_0. Khi đó hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0, hơn nữa :

- $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$.
- $dx = \Delta x$.

Hệ quả - Ứng dụng vi phân tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Vi phân cấp cao

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0).dx^n.$$

2.3. Qui tắc L'Hospital và khử dạng vô định

Qui tắc L'Hospital

Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả vi trên một lân cận của x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **tồn tại** thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\text{có dạng } \frac{0}{0} \text{ hoặc } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Chú ý

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **không tồn tại** thì ta không thể khẳng định

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tồn tại hay không tồn tại.

2.3. Qui tắc L'Hospital và khử dạng vô định

Khử các dạn vô định $\infty - \infty$, $0.\infty$, 0^0

Đưa các dạng vô định này về dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ (được sử dụng quy tắc L'Hospital) như sau :

- $\infty - \infty$: Quy đồng đưa về dạng $\frac{0}{0}$.
- $0.\infty$: Viết thành $\frac{0}{(\frac{1}{\infty})}$ (dạng $\frac{0}{0}$) hoặc $\frac{\infty}{(\frac{1}{0})}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)
- 0^0 : Sử dụng công thức $a^b = e^{b.lna}$ đưa về dạng $0.\infty$.

Chương 3.

Tích phân bất định, Tích phân xác định và Ứng dụng của tích phân xác định.

"Hỏi một câu chỉ dốt chốc lát. Nhưng không hỏi sẽ dốt nát cả đời."

Ngạn ngữ phương Tây.

3.1. Tích phân bất định (không cận)

Một số tích phân đặc biệt

1. $$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C.$$
2. $$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$
3. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$
   $$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$
4. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$$
   $$\int \sqrt{x^2 + b} dx = \frac{b}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + b} + C$$

3.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

3.2.a) Tích phân từng phần $\int f(x)g(x)dx$

Dạng 1. $f(x)$ là đa thức, $g(x) \in \{e^{ax}; \sin ax; \cos ax\}$

$$\Longrightarrow \text{đặt } u = f(x).$$

Dạng 2. $f(x)$ là đa thức hoặc hằng số

$g(x) \in \{\ln ax; \arcsin ax; \arccos ax; \arctan ax\}$

$$\Longrightarrow \text{đặt } u = g(x).$$

Dạng 3. $f(x) = e^{ax}$, $g(x) \in \{\sin ax, \cos bx\}$

$$\Longrightarrow \text{đặt } u = f(x).$$

Chú ý : dạng 3 phải tích phân từng phần 2 lần, rồi chuyển vế tính tích phân.

3.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

3.2.b) Tích phân hàm hữu tỉ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ với bậc$P(x)$ < bậc$Q(x)$

Dạng 1. $Q(x)$ bậc 1 $\Longrightarrow$ ADCT

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

Dạng 2. $Q(x)$ bậc 2

- $Q(x)$ có nghiệm $\Longrightarrow$ Khai triển phân thức và ADCT

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} . \frac{-1}{ax+b} + C.$$

- $Q(x)$ vô nghiệm $\Longrightarrow Q(x) = (mx+n)^2 + a^2$ và đặt

$$(mx+n) = a \tan t.$$

Dạng 3. $Q(x)$ bậc cao $\Longrightarrow$ Khai triển phân thức.

3.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

3.2.c) Tích phân hàm lượng giác

Dạng 1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ với R là **phân thức**

$$\Longrightarrow \text{đặt } t = \tan \frac{x}{2}$$

Một số trường hợp có thể làm ngắn gọn hơn bởi

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Longrightarrow$ đặt $t = \cos x$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Longrightarrow$ đặt $t = \sin x$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Longrightarrow$ đặt $t = \tan x$

Dạng 2. $\int \sin^m x . \cos^n x dx$

- Nếu m lẻ hoặc n lẻ $\Longrightarrow$ đặt $t = \cos x$ hoặc $t = \sin x$
- Nếu m, n cùng chẵn $\Longrightarrow$ dùng CT nhân đôi, hạ bậc

3.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

3.2.d) Tích phân hàm căn thức

Dạng 1. $\displaystyle\int R\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right] dx$

$\Longrightarrow$ đặt $t^k = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với k là BCNN của n và s.

Dạng 2. $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \Longrightarrow$ đặt $u = x + \dfrac{b}{2a}$ đưa về tích phân chứa một trong các dạng căn

- $\sqrt{\alpha^2 - u^2} \longrightarrow$ đặt $u = \alpha \sin t$
- $\sqrt{\alpha^2 + u^2} \longrightarrow$ đặt $u = \alpha \tan t$
- $\sqrt{u^2 - \alpha^2} \longrightarrow$ đặt $u = \dfrac{\alpha}{\cos t}$

3.4. Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận $\pm\infty$

Ta ký hiệu (và gọi là TPSR)

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bởi giới hạn $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$

TPSR được gọi là hội tụ nếu các giới hạn tương ứng hữu hạn.

Ví dụ : Xét sự hội của các tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

3.4. Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận hữu hạn

- Nếu $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$
- TPSR được gọi là hội tụ nếu giới hạn tương ứng hữu hạn.

Ví dụ : Xét sự hội của các tích phân suy rộng

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x}dx, \quad \int_1^{-1} \frac{1}{x^2}dx.$$

Chương 4.

Chuỗi số

"Đừng xấu hổ khi không biết, chỉ xấu hổ khi không học."

Khuyết danh.

4.1. Định nghĩa chuỗi số và tính chất

Định nghĩa chuỗi số

Cho dãy số $\{u_n\}$, khi đó tổng vô hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

được gọi là một chuỗi số. Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là **tổng riêng phần** của chuỗi đã cho.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ tồn tại thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi hội tụ. Ngược lại gọi là phân kỳ.

Ví dụ : Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

4.1. Định nghĩa chuỗi số và tính chất

Tính chất của chuỗi số

TC 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ hội tụ $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

TC 2
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ phân kỳ
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ $\Longrightarrow$ không có kết luận.

TC 3 Nếu $u_n \leq v_n$ với $n \geq n_0$ thì
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ

4.2. Các tiêu chuẩn hội tụ của **chuỗi số dương**

1. Tiêu chuẩn so sánh

Cho hai chuỗi (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và (2) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = L$.

- $L = 0$: (2) hội tụ $\Longrightarrow$ (1) hội tụ.
- $L = +\infty$: (1) hội tụ $\Longrightarrow$ (2) hội tụ.
- $0 < L < +\infty$: (1) và (2) có cùng tính chất hội tụ, phân kỳ.

Ví dụ : xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2n+3}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n.2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$$

4.2. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

Giả sử ta có (D) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$ hoặc ta có (C) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.

2. Tiêu chuẩn D'Alembert và Tiêu chuẩn Cauchy

- $L < 1 \Longrightarrow$ chuỗi hội tụ.
- $L > 1 \Longrightarrow$ chuỗi phân kỳ.
- $L = 1 \Longrightarrow$ không có kết luận. Nếu có n_0 nào đó mà $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ hoặc $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ với $n \geq n_0$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ : xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^{2n-1}.$$

4.2. Các tiêu chuẩn hội tụ của **chuỗi số dương**

3. Tiêu chuẩn tích phân

Cho hàm số **liên tục, không âm** $y = f(x)$ và **nghịch biến** trên khoảng $(1, +\infty)$. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{và} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ : xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

4.3. Chuỗi có dấu bất kỳ và chuỗi đan dấu

1. Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Vì $\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ nên nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

2. Tiêu chuẩn Leibniz *(chuỗi đan dấu)*

Nếu dãy số u_n giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ hội tụ về S. Hơn nữa $0 < S < u_1$.

Ví dụ : xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n}{n^4+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+n+1}.$$

"Một ngày ngồi trách móc sao bằng một giờ làm việc. Một giờ này làm lòng ta nhẹ và túi ta nặng."

Benjamin Franklin.

HẾT.