

Phần I. Trắc Nghiệm (6,0 điểm)

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \arcsin\left(\ln\left(\frac{x}{e}\right)\right)$ là

- A. $[1; e^2]$ B. $[1; e^2] \setminus \{e\}$ C. $[0; e^2]$ D. $[1; e]$

Câu 2. Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ a \arccos\left(x - \frac{1}{2}\right), & x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$ là

- A. 0 B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{-3}{2\pi}$ D. $\frac{3}{4\pi}$

Câu 3. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}$ bằng

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Câu 4. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 4}{2x - 5}\right)^{1-3x}$ bằng

- A. 1 B. $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$ C. e^3 D. $\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$

Câu 5. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$ bằng

- A. 1 B. $-\infty$ C. $+\infty$ D. Không tồn tại

Câu 6. Đạo hàm cấp 8 của hàm số $y = \frac{4 - x^2}{e^{x-1}}$ là

- A. $\frac{x^2 - 16x + 52}{e^{x-1}}$ B. $\frac{x^2 + 16x + 52}{e^{x-1}}$ C. $\frac{-x^2 - 16x - 52}{e^{x-1}}$ D. $\frac{-x^2 + 16x - 52}{e^{x-1}}$

Câu 7. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos x$ là

- A. $-\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ B. $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ C. $\cos(x + n\pi)$ D. $-\sin(x + n\pi)$

Câu 8. Tích phân $\int (x^2 - 1)e^{1-x} dx$ bằng

- A. $-(x - 1)^2 e^{1-x} + C$ B. $(x - 1)^2 e^{1-x} + C$ C. $-(x + 1)^2 e^{1-x} + C$ D. $(x + 1)^2 e^{1-x} + C$

Câu 9. Tích phân $y = \int \sqrt{2x - x^2} dx$ bằng

- A. $\frac{\arcsin(x - 1)}{2} + C$ B. $\frac{(x - 1)\sqrt{2x - x^2} + \arcsin x}{2} + C$ C. $\frac{(x - 1)\sqrt{2x - x^2} + \arcsin(x - 1)}{2} + C$ D. $\frac{(x - 1)\sqrt{2x - x^2}}{2} + C$

Câu 10. Tích phân $\int \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} dx$ bằng

A. $4 \ln x - 3 \ln(x-1) - \frac{9}{x-1} + C$

B. $4 \ln x - 3 \ln(x-1) + \frac{9}{x-1} + C$

C. $4 \ln x + 3 \ln(x-1) - \frac{9}{x-1} + C$

D. $4 \ln x + 3 \ln(x-1) + \frac{9}{x-1} + C$

Câu 11. Tích phân $\int \frac{1}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx$ bằng

A. $\frac{-1}{\arctan(t-2)} + C$

B. $\arctan(t-2) + C$

C. $\frac{1}{\tan x + 2} + C$

D. $\frac{\tan x + 1}{\tan x + 2} + C$

Câu 12. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + \sqrt{n^7 + 2}} \right)^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

B. Hội tụ

C. Phân kỳ

D. Hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alambert

Câu 13. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^q$ hội tụ khi

A. $q > -1$

B. $q < -1$

C. $|q| < 1$

D. $q < 0$

Câu 14. Tổng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n 3^n}{5^{2n}}$ có kết quả là

A. $\frac{25}{31}$

B. $-\frac{6}{19}$

C. $-\frac{6}{31}$

D. $\frac{25}{19}$

Câu 15. Cho hai chuỗi số (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và (2) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, giả sử $0 \leq u_n \leq v_n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu chuỗi (1) hội tụ thì chuỗi (2) hội tụ

B. Nếu chuỗi (2) phân kỳ thì chuỗi (1) phân kỳ

C. Hai chuỗi có cùng tính chất

D. Cả ba câu A, B, C đều sai

Phần II. Tự Luận (4,0 điểm)

Câu 16 (2,5 điểm) Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2} (x-2)^n}$.

Câu 17 (1,5 điểm) Tính giá trị gần đúng của $\arccos(0,51)$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} \frac{x}{e} > 0 \\ -1 \leq \ln \frac{x}{e} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{x}{e} \leq e \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e^2.$

Câu 2. Ta có $f(0) = a \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi a}{3}.$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

Do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi a}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4\pi}.$

Câu 3.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \cdot (\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1)}{\sin^2 x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} (\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1) \quad (e^{x^2} - 1 \sim x^2 \text{ vì } x^2 \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow 0) \\ = 2.$$

Câu 4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 4}{2x - 5} \right)^{1-3x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 4}{2x - 5} - 1 \right) \cdot (1 - 3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x}{2x - 5}} = e^{-3/2} = \frac{1}{e^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Câu 5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x)}{\frac{1}{x} - 1} \left(\frac{1}{0} \right)$ không tồn tại vì không xét được $-$ hay $+$.

Câu 6. Ta có $y = (4 - x^2)e^{1-x}$ và $(4 - x^2)^{(k)} = 0$ với $k \geq 3$ nên

$$y^{(8)} = C_8^0(4 - x^2) \cdot (e^{1-x})^{(8)} + C_8^1(4 - x^2)^{(1)} \cdot (e^{1-x})^{(7)} + C_8^2(4 - x^2)^{(2)} \cdot (e^{1-x})^{(6)} \\ = (4 - x^2)(1-)^8 e^{1-x} + 8(-2x)(-1)^7 e^{1-x} + 28(-2)(-1)^6 e^{1-x} \\ = (4 - x^2 + 16x - 56) e^{1-x} \\ = \frac{-x^2 + 16x - 52}{e^{x-1}}.$$

Câu 7. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

Câu 8. Sơ đồ tích phân từng phần

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \quad e^{1-x} \\ \quad \searrow + \\ 2x \quad -e^{1-x} \\ \quad \searrow - \\ 2 \quad e^{1-x} \\ \quad \searrow + \\ 0 \quad -e^{1-x} \end{array} \implies I = -(x^2 - 1)e^{1-x} - 2xe^{1-x} - 2e^{1-x} \\ = -(x^2 + 2x + 1)e^{1-x} \\ = -(x + 1)^2 e^{1-x}$$

Câu 9. Đặt $x - 1 = \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \implies dx = \cos t dt$ và

$$\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x - 1)^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t \text{ vì } \cos t \geq 0.$$

Ta có $\int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt$

$$= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2}t + C = \frac{(x - 1)\sqrt{2x - x^2} + \arcsin(x - 1)}{2} + C$$

Câu 10. Ta chọn A, B, C sao cho

$$\begin{aligned} \frac{(x + 2)^2}{x(x - 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}, \quad \forall x \neq 0, 1 \\ \implies (x + 2)^2 &= A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx, \quad \forall x \\ \implies x^2 + 4x + 4 &= (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + A, \quad \forall x \\ \implies A, B, C &: \begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B + C = 4 \\ A = 4 \end{cases} \implies A = 4, B = -3, C = 9 \end{aligned} \quad (1)$$

Suy ra $\int \frac{(x + 2)^2}{x(x - 1)^2} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x - 1} dx + 9 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = 4 \ln x - 3 \ln(x - 1) - \frac{9}{x - 1} + C.$

Câu 11. Vì $R[-\sin x, -\cos x] = R[\sin x, \cos x]$ nên đặt $t = \tan x$. Ta có $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ và

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2} &= \int \frac{dx}{(\tan x + 2)^2 \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(t + 2)^2} = \frac{-1}{t + 2} + C \\ &= 1 + \frac{-1}{t + 2} + C' = \frac{t + 1}{t + 2} + C' = \frac{\tan x + 1}{\tan x + 2} + C' \end{aligned}$$

trong đó vì C là hằng số nên có thể chọn $C = 1 + C'$ với C' là một hằng số khác.

Câu 12. Ký hiệu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + \sqrt{n^7 + 2}}\right)^2$ là chuỗi (1) với $u_n = \left(\frac{n^3}{n^2 + \sqrt{n^7 + 2}}\right)^2$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

là chuỗi (2) với $v_n = \frac{1}{n}$. Ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{n^3}{n^2 + \sqrt{n^7 + 2}}\right)^2 n \right] = 1 \in (0; +\infty)$$

nên theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi (1) và chuỗi (2) có cùng tính chất. Vì chuỗi (2) phân kỳ nên chuỗi (1) cũng phân kỳ.

Câu 13. Chuỗi đã cho được viết lại ở dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-q}}$. Do đó chuỗi đã cho hội tụ $\Leftrightarrow -q > 1 \Leftrightarrow q < -1$.

Câu 14. Chuỗi đã cho được viết lại ở dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-6}{25}\right)^n = \frac{\frac{-6}{25}}{1 - \left(\frac{-6}{25}\right)} = \frac{-6}{31}$.

Câu 15. Nếu chuỗi (1) phân kỳ thì chuỗi (2) phân kỳ. Nếu chuỗi (2) hội tụ thì chuỗi (1) hội tụ. Không có cơ sở khẳng định hai chuỗi cùng tính chất. Nên cả ba câu A, B, C đều sai.

Câu 16. Đặt $X = -\frac{1}{x-2}$, suy ra $(-1)^n \frac{1}{(x-2)^n} = X^n$. Do đó chuỗi đã cho có dạng chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} X^n \text{ với } a_n = \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} = \frac{e^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}.$$

- Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{en^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} = 1$. Suy ra chuỗi có bán kính hội tụ $R = 1$.
- Xét $X = 1$: chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ với $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} = 1 \neq 0$ nên phân kỳ.
- Xét $X = -1$: chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ với $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{e^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ không tồn tại vì bằng 1 nếu n chẵn và bằng -1 nếu n lẻ. Do vậy chuỗi phân kỳ.
- Giải $|X| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow 1 < |x-2| \Leftrightarrow x-2 < -1$ hoặc $x-2 > 1 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 3$.
- Miền hội tụ của chuỗi $\mathbb{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 17. Đặt $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Chọn $x_0 = \frac{1}{2}$ và $\Delta x = 0,01$. Ta có

$$\begin{aligned} \arccos(0,51) = f(0,51) &= f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &\simeq \arccos \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}.0,01 \\ &\simeq \frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.0,01 \\ &\simeq 1.04 \end{aligned}$$

Chúc các em thi học kỳ thành công.

ThS. Trần Bảo Ngọc