Hàm số, Giới hạn và Hàm sô liên tục

Trần Bảo Ngọc

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học, Đại học Nông Lâm

Nội dung

1. Khái niệm và phân loại hàm sô

1. Khái niệm và phân loại hàm sô

Các **hàm số sơ cấp cơ bản** (ở bậc THPT)

1. Khái niệm và phân loại hàm sô

Các **hàm số sơ cấp cơ bản** (ở bậc THPT)

- Hàm lũy thừa

  Ví dụ: $x^5, \quad x^{-2} := \dfrac{1}{x^2}, \quad x^{\frac{2}{3}} := \sqrt[3]{x^2}, \ldots$

1. Khái niệm và phân loại hàm sô

Các **hàm số sơ cấp cơ bản** (ở bậc THPT)

- Hàm lũy thừa

  Ví dụ: $x^5, \quad x^{-2} := \dfrac{1}{x^2}, \quad x^{\frac{2}{3}} := \sqrt[3]{x^2}, \ldots$

- Hàm mũ và logarit

  Ví dụ: $5^x, \quad 2^{-x} := \dfrac{1}{2^x}, \quad 3^{2x} = (3^x)^2 = 9^x, \quad 3^x = e^{x \ln 3}, \ldots$

1. Khái niệm và phân loại hàm sô

Các **hàm số sơ cấp cơ bản** (ở bậc THPT)

- Hàm lũy thừa
  Ví dụ: $x^5, \quad x^{-2} := \dfrac{1}{x^2}, \quad x^{\frac{2}{3}} := \sqrt[3]{x^2}, \ldots$
- Hàm mũ và logarit
  Ví dụ: $5^x, \quad 2^{-x} := \dfrac{1}{2^x}, \quad 3^{2x} = (3^x)^2 = 9^x, \quad 3^x = e^{x\ln 3}, \ldots$
- Hàm lượng giác
  Ví dụ: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Các **hàm số sơ cấp cơ bản** (ở bậc THPT)

- Hàm lũy thừa

  Ví dụ: $x^5, \quad x^{-2} := \dfrac{1}{x^2}, \quad x^{\frac{2}{3}} := \sqrt[3]{x^2}, \dots$
- Hàm mũ và logarit

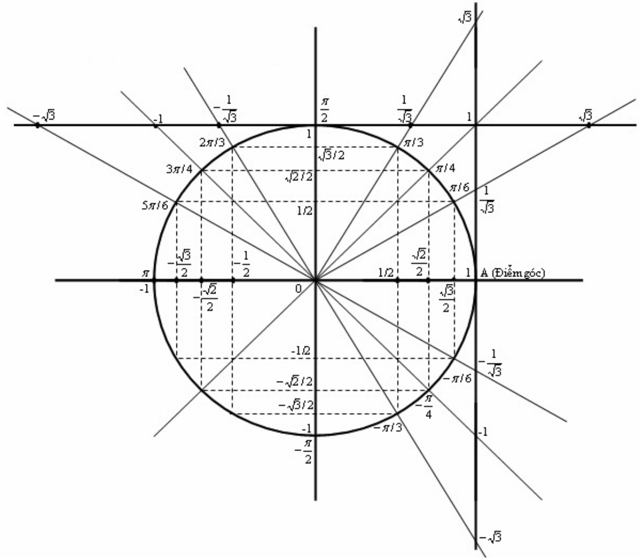
  Ví dụ: $5^x, \quad 2^{-x} := \dfrac{1}{2^x}, \quad 3^{2x} = (3^x)^2 = 9^x, \quad 3^x = e^{x \ln 3}, \dots$
- Hàm lượng giác

  Ví dụ: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x.$

Khái niệm **hàm số sơ cấp** (tổng quát)

Hàm số sơ cấp tổng quát là hàm thu được bằng cách lấy tổng, hiệu, tích, thương, hợp của các hàm sơ cấp cơ bản.

1. Khái niệm và phân loại hàm số



1. Khái niệm và phân loại hàm số

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Các hàm số lượng giác ngược

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Các hàm số lượng giác ngược

1. $y = \arcsin x \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1, & -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Các hàm số lượng giác ngược

1. $y = \arcsin x \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, & -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$
2. $y = \arccos x \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq \pi \\ x = \cos y \end{cases}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Các hàm số lượng giác ngược

1. $y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, & -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$
2. $y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq \pi \\ x = \cos y \end{cases}$
3. $y = \arctan x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ x = \tan y \end{cases}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Các hàm số lượng giác ngược

1. $y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, & -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$
2. $y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, & 0 \le y \le \pi \\ x = \cos y \end{cases}$
3. $y = \arctan x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ x = \tan y \end{cases}$
4. $y = \mathrm{arccot}\, x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & 0 < y < \pi \\ x = \cot y \end{cases}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.1.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.1.

a) Tính $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arctan(\sqrt{3})$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.1.

a) Tính $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arctan(\sqrt{3})$

b) Tìm tập xác định của hàm số $y = \arcsin \log \frac{x}{10}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.1.

a) Tính $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arctan(\sqrt{3})$

b) Tìm tập xác định của hàm số $y = \arcsin \log \frac{x}{10}$

a) $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.1.

a) Tính $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arctan(\sqrt{3})$

b) Tìm tập xác định của hàm số $y = \arcsin \log \frac{x}{10}$

a) $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

b) Điều kiện xác định của hàm số:

$$
\begin{aligned}
-1 \le \log \frac{x}{10} \le 1 \quad (x > 0) &\Longleftrightarrow \log \frac{1}{10} \le \log \frac{x}{10} \le \log 10 \quad (x > 0) \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{10} \le \frac{x}{10} \le 10 \quad (x > 0) \\
&\Longleftrightarrow 1 \le x \le 100
\end{aligned}
$$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.1.

a) Tính $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arctan(\sqrt{3})$

b) Tìm tập xác định của hàm số $y = \arcsin \log \frac{x}{10}$

a) $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

b) Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{aligned} -1 \le \log \frac{x}{10} \le 1 \quad (x > 0) &\Longleftrightarrow \log \frac{1}{10} \le \log \frac{x}{10} \le \log 10 \quad (x > 0) \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{10} \le \frac{x}{10} \le 10 \quad (x > 0) \\ &\Longleftrightarrow 1 \le x \le 100 \end{aligned}$$

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{D} = [1; 100]$.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y = \arcsin \frac{1}{x}$. Tập xác định của hàm số là

A. $[-1; 1]$ **B.** $[-1; 0]$

C. $[0; 1]$ **D.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$. Tập xác định của hàm số là

A. $[-1; 1]$ **B.** $[-1; 0]$

C. $[0; 1]$ **D.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{aligned}
&-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \\
\iff &\frac{1+x}{x} \geq 0 \text{ và } \frac{1-x}{x} \leq 0 \\
\iff &x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty) \text{ và } x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \\
\iff &x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).
\end{aligned}$$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$. Tập xác định của hàm số là

A. $[-1; 1]$ **B.** $[-1; 0]$

C. $[0; 1]$ **D.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{aligned}
& -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \\
\Longleftrightarrow & \frac{1+x}{x} \geq 0 \text{ và } \frac{1-x}{x} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow & x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty) \text{ và } x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \\
\Longleftrightarrow & x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.3. Chọn phát biểu đúng

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** Nếu $\arcsin x = \arccos y$ thì $x^2 + y^2 = 1$.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.3. Chọn phát biểu đúng

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** Nếu $\arcsin x = \arccos y$ thì $x^2 + y^2 = 1$.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.3. Chọn phát biểu đúng

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** Nếu $\arcsin x = \arccos y$ thì $x^2 + y^2 = 1$.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.3. Chọn phát biểu đúng

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** Nếu $\arcsin x = \arccos y$ thì $x^2 + y^2 = 1$.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

C. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$, nên suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ không tồn tại.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.3. Chọn phát biểu đúng

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** Nếu $\arcsin x = \arccos y$ thì $x^2 + y^2 = 1$.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

C. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$, nên suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ không tồn tại.

D. Đặt $\alpha = \arcsin x = \arccos y$ suy ra $x = \sin\alpha$ và $y = \cos\alpha$.

1. Khái niệm và phân loại hàm số

Ví dụ 1.3. Chọn phát biểu đúng

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** Nếu $\arcsin x = \arccos y$ thì $x^2 + y^2 = 1$.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

C. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$, nên suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ không tồn tại.

D. Đặt $\alpha = \arcsin x = \arccos y$ suy ra $x = \sin\alpha$ và $y = \cos\alpha$.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Nội dung

2. Giới hạn của hàm số

2. Giới hạn của hàm số

Các định nghĩa giới hạn và tính chất có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh:

2. Giới hạn của hàm số

Các định nghĩa giới hạn và tính chất có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh:

Các quá trình (được xét trong môn Toán B1)

Ta xét 2 quá trình: $x \to a$, $x \to \infty$. Ứng với 2 quá trình đó, các giới hạn được xét ở dạng:

$$\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to \infty} f(x).$$

2. Giới hạn của hàm số

Các định nghĩa giới hạn và tính chất có thể xem trong giáo trình (đã học ở cấp THPT). Ở đây ta nhấn mạnh:

Các quá trình (được xét trong môn Toán B1)

Ta xét 2 quá trình: $x \to a$, $x \to \infty$. Ứng với 2 quá trình đó, các giới hạn được xét ở dạng:

$$\lim_{x \to a} f(x), \ \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Các dạng vô định thường gặp

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0.\infty, \quad \infty^0, \quad 0^\infty, \quad 0^0 \text{ và } \quad 1^\infty.$$

2.1. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

2.1. Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Phương pháp

Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ hoặc phép chia Horner để đặt nhân tử chung rồi khử (rút gọn) lượng vô định. Trường hợp có căn thức, ta thực hiện trục căn thức.

2.1. Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Phương pháp

Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ hoặc phép chia Horner để đặt nhân tử chung rồi khử (rút gọn) lượng vô định. Trường hợp có căn thức, ta thực hiện trục căn thức.

Ví dụ 2.1.

Tính giới hạn $L_1 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}$.

2.1. Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Phương pháp

Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ hoặc phép chia Horner để đặt nhân tử chung rồi khử (rút gọn) lượng vô định. Trường hợp có căn thức, ta thực hiện trục căn thức.

Ví dụ 2.1.

Tính giới hạn $L_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+3x-2}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } L_1 &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2-x+2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-x+2} = \frac{1+1}{1^2-1+2} = 1.\end{aligned}$$

2.1. Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

2.1. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Ví dụ 2.2.

Tính giới hạn $L_2 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{2 - x}}{x^3 - 1}$.

2.1. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Ví dụ 2.2.

Tính giới hạn $L_2 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{2-x}}{x^3 - 1}$.

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - \sqrt{2-x})(x + \sqrt{2-x})}{(x^3 - 1)(x + \sqrt{2-x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - (2 - x)}{(x^3 - 1)(x + \sqrt{2-x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)(x + \sqrt{2-x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x^2 + x + 1)(x + \sqrt{2-x})} \\
&= \frac{1+2}{(1^2 + 1 + 1)(1 + \sqrt{2-1})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Phương pháp

Sử dụng giới hạn cơ bản $\frac{1}{0} = \pm\infty$.

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Phương pháp

Sử dụng giới hạn cơ bản $\frac{1}{0} = \pm\infty$.

Bài tập 2.3.

Tính giới hạn $L_3 = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$.

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Phương pháp

Sử dụng giới hạn cơ bản $\frac{1}{0} = \pm\infty$.

Bài tập 2.3.

Tính giới hạn $L_3 = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$.

Ta có
$$L_3 = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Phương pháp

Sử dụng giới hạn cơ bản $\frac{1}{0} = \pm\infty$.

Bài tập 2.3.

Tính giới hạn $L_3 = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$.

$$\text{Ta có } \quad L_3 = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^3}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

vì $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2}$ có dạng cơ bản $\frac{1}{0}$ và $\frac{x-3}{(x-2)^2} < 0$ khi x tiến tới 2.

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Chú ý: Các trường hợp không xác định được biểu thức lấy giới hạn âm/dương, ta khẳng định giới hạn không tồn tại.

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Chú ý: Các trường hợp không xác định được biểu thức lấy giới hạn âm/dương, ta khẳng định giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 2.3

Tính giới hạn $L_4 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2}$.

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Chú ý: Các trường hợp không xác định được biểu thức lấy giới hạn âm/dương, ta khẳng định giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 2.3

Tính giới hạn $L_4 = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{1-x^2}$.

- $$\begin{aligned} \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2+2x-3}{1-x^2} &= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-(x+3)}{x+1} = +\infty \qquad (1) \end{aligned}$$

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Chú ý: Các trường hợp không xác định được biểu thức lấy giới hạn âm/dương, ta khẳng định giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 2.3

Tính giới hạn $L_4 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2}$.

- $$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2+2x-3}{1-x^2} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-(x+3)}{x+1} = +\infty \qquad (1)$$
- $$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2+2x-3}{1-x^2} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-(x+3)}{x+1} = -\infty \qquad (2)$$

2.2. Giới hạn $\frac{1}{0}$ và Giới hạn một bên (trái, phải)

Chú ý: Các trường hợp không xác định được biểu thức lấy giới hạn âm/dương, ta khẳng định giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 2.3

Tính giới hạn $L_4 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2}$.

- $$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2+2x-3}{1-x^2} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-(x+3)}{x+1} = +\infty \quad (1)$$
- $$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2+2x-3}{1-x^2} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-(x+3)}{x+1} = -\infty \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giới hạn L_4 không tồn tại.

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Phương pháp

Chia tử và mẫu cho $x^{\text{bậc cao nhất ở mẫu}}$ rồi sử dụng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ với $k > 0$.

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Phương pháp

Chia tử và mẫu cho $x^{\text{bậc cao nhất ở mẫu}}$ rồi sử dụng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ với $k > 0$.

Ví dụ 2.4.

Tính giới hạn $L_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{2x+3}$.

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Phương pháp

Chia tử và mẫu cho $x^{\text{bậc cao nhất ở mẫu}}$ rồi sử dụng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ với $k > 0$.

Ví dụ 2.4.

Tính giới hạn $L_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{2x+3}$.

Chia tử và mẫu cho x $(x > 0)$ ta được

$$L_5 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{1}}{2} = 1.$$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 2.5. Tính giới hạn

a) $L_6 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + \sqrt{x^2 + 2}}{2x + 3}$ b) $L_7 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 3}{x^2 + \sqrt{x^2 + 2}}$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 2.5. Tính giới hạn

a) $L_6 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + \sqrt{x^2+2}}{2x+3}$ b) $L_7 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x^2 + \sqrt{x^2+2}}$

a) Chia tử và mẫu cho x $(x < 0)$ ta được

$$L_6 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}}{2 + \dfrac{3}{x}} \left(= \frac{-\infty - 1}{2} \right) = -\infty.$$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 2.5. Tính giới hạn

a) $L_6 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + \sqrt{x^2+2}}{2x+3}$ b) $L_7 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^2 + \sqrt{x^2+2}}$

a) Chia tử và mẫu cho x $(x < 0)$ ta được

$$L_6 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}}{2 + \dfrac{3}{x}} \left(= \frac{-\infty - 1}{2} \right) = -\infty.$$

b) Chia tử và mẫu cho x^2 $(x^2 > 0)$ ta được

$$L_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x^2+\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}} = \frac{0}{1+\sqrt{1}} = 0.$$

2.3. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Từ các ví dụ trước ta dễ dàng rút ra kết luận:

2.3. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Từ các ví dụ trước ta dễ dàng rút ra kết luận:

Chú ý: suy ra nhanh kết quả của giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Từ các ví dụ trước ta dễ dàng rút ra kết luận:

Chú ý: suy ra nhanh kết quả của giới hạn dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

a) bậc tử = bậc mẫu: kết quả $= \dfrac{\text{tổng hệ số bậc cao nhất ở tử}}{\text{tổng hệ số bậc cao nhất ở mẫu}}$,

2.3. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Từ các ví dụ trước ta dễ dàng rút ra kết luận:

Chú ý: suy ra nhanh kết quả của giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

a) bậc tử = bậc mẫu: kết quả $= \dfrac{\text{tổng hệ số bậc cao nhất ở tử}}{\text{tổng hệ số bậc cao nhất ở mẫu}}$,

b) bậc tử < bậc mẫu: kết quả = 0,

2.3. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Từ các ví dụ trước ta dễ dàng rút ra kết luận:

Chú ý: suy ra nhanh kết quả của giới hạn dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

a) bậc tử = bậc mẫu: kết quả $= \dfrac{\text{tổng hệ số bậc cao nhất ở tử}}{\text{tổng hệ số bậc cao nhất ở mẫu}}$,

b) bậc tử < bậc mẫu: kết quả $= 0$,

c) bậc tử > bậc mẫu: kết quả $= \pm\infty$.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Phương pháp

Quy đồng đưa giới hạn đã cho về một trong các dạng $\dfrac{0}{0}, \dfrac{1}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Phương pháp

Quy đồng đưa giới hạn đã cho về một trong các dạng $\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ 2.6.

Tính giới hạn $L_8 = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x^2 - x - 2} - \dfrac{1}{3x - 6} \right)$.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Phương pháp

Quy đồng đưa giới hạn đã cho về một trong các dạng $\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ 2.6.

Tính giới hạn $L_8 = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-x-2} - \frac{1}{3x-6}\right)$.

$$\begin{aligned} L_8 &= \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{3(x-2)}\right] \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{3-(x+1)}{3(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{3(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{3(x+1)} = -\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Ví dụ 2.7.

Tính giới hạn $L_9 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 - x} \right)$.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Ví dụ 2.7.

Tính giới hạn $L_9 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 - x} \right)$.

Ta có

$$L_9 = \lim_{x \to 0} \frac{(x-1) - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 2}{x(x-1)} \qquad \left(\frac{1}{0} \right).$$

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Ví dụ 2.7.

Tính giới hạn $L_9 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 - x} \right)$.

Ta có

$$L_9 = \lim_{x \to 0} \frac{(x-1)-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x(x-1)} \qquad \left(\frac{1}{0}\right).$$

Mặt khác

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{x(x-1)} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{x(x-1)} = +\infty$,

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Ví dụ 2.7.

Tính giới hạn $L_9 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 - x} \right)$.

Ta có

$$L_9 = \lim_{x \to 0} \frac{(x-1)-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x(x-1)} \qquad \left(\frac{1}{0}\right).$$

Mặt khác

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{x(x-1)} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{x(x-1)} = +\infty$,

nên giới hạn L_9 không tồn tại.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Nếu đúng dạng $\infty - \infty$ và xuất hiện căn thức, ta sẽ trục căn thức.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Nếu đúng dạng $\infty - \infty$ và xuất hiện căn thức, ta sẽ trục căn thức.

Ví dụ 2.9.

Tính giới hạn $L_{10} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$.

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Nếu đúng dạng $\infty - \infty$ và xuất hiện căn thức, ta sẽ trục căn thức.

Ví dụ 2.9.

Tính giới hạn $L_{10} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$.

$$L_{10} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

2.4. Dạng vô định $\infty - \infty$

Nếu đúng dạng $\infty - \infty$ và xuất hiện căn thức, ta sẽ trục căn thức.

Ví dụ 2.9.

Tính giới hạn $L_{10} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$.

$$L_{10} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - x)(\sqrt{x^2+3x} + x)}{(\sqrt{x^2+3x} + x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{(\sqrt{x^2+3x} + x)} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Chia tử và mẫu cho x $(x > 0)$ ta được

$$L_{10} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}.$$

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^{∞})

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^∞)

Định lý 1

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^∞)

Định lý 1

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^{∞})

Định lý 1

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^∞)

Định lý 1

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^{∞})

Định lý 1

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ví dụ 2.10. Tính giới hạn

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2}$.

2.5. Các giới hạn cơ bản (dạng $\frac{0}{0}$ và 1^∞)

Định lý 1

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$
2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ví dụ 2.10. Tính giới hạn

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}.\frac{a}{\cos ax} = a.$$

2.5. Các giới hạn cơ bản

2.5. Các giới hạn cơ bản

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\left(\frac{ax}{2}\right)}\right]^2.\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

2.5. Các giới hạn cơ bản

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\left(\frac{ax}{2}\right)}\right]^2 . \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}.$

Ví dụ 2.11. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^x-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\lg x}$.

2.5. Các giới hạn cơ bản

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\left(\frac{ax}{2}\right)}\right]^2.\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

Ví dụ 2.11. Tính giới hạn

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{3^x-1}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\lg x}$.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}.\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

2.5. Các giới hạn cơ bản

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\left(\frac{ax}{2}\right)}\right]^2 . \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}.$

Ví dụ 2.11. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^x-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\lg x}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1} . \dfrac{\cos x-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3} . \ln 3 = \ln 3.$

2.5. Các giới hạn cơ bản

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\left(\frac{ax}{2}\right)}\right]^2\cdot\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}.$

Ví dụ 2.11. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^x-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\lg x}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}.\ln 3=\ln 3.$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\lg x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}\ln 10=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left[\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}\right]}\ln 10=\ln 10.$

2.5. Các giới hạn cơ bản

2.5. Các giới hạn cơ bản

Định lý 2

$$\lim\,[u(x)]^{v(x)}\left(\text{ có dạng } 1^{\infty}\right) = e^{\lim[u(x)-1].v(x)}.$$

2.5. Các giới hạn cơ bản

Định lý 2

$$\lim\, [u(x)]^{v(x)} \left(\text{ có dạng } 1^{\infty} \right) = e^{\lim[u(x)-1].v(x)}.$$

Ví dụ 2.12. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{1-2n}$

2.5. Các giới hạn cơ bản

Định lý 2

$$\lim\,[u(x)]^{v(x)}\left(\text{ có dạng } 1^{\infty}\right)=e^{\lim[u(x)-1].v(x)}.$$

Ví dụ 2.12. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{1-2n}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x-1).\frac{1}{x}}=e.$

2.5. Các giới hạn cơ bản

Định lý 2

$$\lim\,[u(x)]^{v(x)}\left(\text{ có dạng } 1^{\infty}\right) = e^{\lim[u(x)-1].v(x)}.$$

Ví dụ 2.12. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{1-2n}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x-1).\frac{1}{x}} = e.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}-1\right)x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}.$

2.5. Các giới hạn cơ bản

Định lý 2

$$\lim\,[u(x)]^{v(x)}\left(\text{ có dạng } 1^{\infty}\right) = e^{\lim[u(x)-1].v(x)}.$$

Ví dụ 2.12. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{1-2n}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x-1).\frac{1}{x}} = e.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}-1\right)x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{1-2n} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{n+1}{n-1}-1\right).(1-2n)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-2n)}{n-1}} = \dfrac{1}{e^4}.$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Chú ý 1: x, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^α $(\alpha > 0)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to 0$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Chú ý 1: x, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^{α} $(\alpha > 0)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to 0$.

Chú ý 2: , $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$, q^{x} $(|q| < 1)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to +\infty$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Chú ý 1: x, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^α $(\alpha > 0)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to 0$.

Chú ý 2: , $\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, q^x $(|q| < 1)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to +\infty$.

b) Tính chất

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Chú ý 1: x, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^α $(\alpha > 0)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to 0$.

Chú ý 2: , $\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, q^x $(|q| < 1)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to +\infty$.

b) Tính chất

- $\lim \alpha(x) = L \Longleftrightarrow \{\alpha(x) - L\}$ là một VCB.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

a) Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB trong một quá trình nào đó nếu $\lim \alpha(x) = 0$ trong quá trình đó.

Chú ý 1: x, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, x^α $(\alpha > 0)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to 0$.

Chú ý 2: , $\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, q^x $(|q| < 1)$ là các VCB xét trong quá trình $x \to +\infty$.

b) Tính chất

- $\lim \alpha(x) = L \Longleftrightarrow \{\alpha(x) - L\}$ là một VCB.
- Nếu $\alpha(x)$ là 1 VCB và $|\beta(x)| \leq M$ thì $\alpha(x).\beta(x)$ là 1 VCB.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.

  Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.

  Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

d) Quá trình $u \to 0$ và VCB tương đương thường gặp

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.

  Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

d) Quá trình $u \to 0$ và VCB tương đương thường gặp

- $\sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim u.$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.
  Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

d) Quá trình $u \to 0$ và VCB tương đương thường gặp

- $\sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim u$.
- $1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2}$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

c) So sánh hai VCB trong **cùng quá trình**

- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.
- Nếu $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp.
  Đặc biệt nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

d) Quá trình $u \to 0$ và VCB tương đương thường gặp

- $\sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim u$.
- $1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2}$.
- $\ln(1+u) \sim (e^u - 1) \sim u$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

e) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và VCB tương đương

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ thì

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

e) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ và VCB tương đương

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ thì

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ 2.13. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}} - 1}{x}$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

e) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ và VCB tương đương

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ thì

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ 2.13. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} \left(\dfrac{0}{0}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} \left(\dfrac{0}{0}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}}-1}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

e) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ và VCB tương đương

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ thì

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ 2.13. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} \left(\dfrac{0}{0}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} \left(\dfrac{0}{0}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}}-1}{x}$

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} \text{ vì } \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \text{ khi } x \to 0.$$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \ . \ \left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$ vì $\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right) \sim \dfrac{x-a}{2}$ khi $x \to a$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$ vì $\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right) \sim \dfrac{x-a}{2}$ khi $x \to a$.

$= \lim\limits_{x\to a} \cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right) = \cos a.$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

b) $$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\ .\ \left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \text{ vì } \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \sim \frac{x-a}{2} \text{ khi } x \to a.$$

$$= \lim_{x\to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos a.$$

c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}\ln 3} - 1}{x}$$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\ .\ \left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$ vì $\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right) \sim \dfrac{x-a}{2}$ khi $x \to a$.

$= \lim\limits_{x\to a} \cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right) = \cos a.$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}\ln 3} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}\ln 3}{x}$ vì $e^{\sqrt{x}\ln 3} - 1 \sim \sqrt{x}\ln 3$ khi $x \to 0$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\ .\ \left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$ vì $\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right) \sim \dfrac{x-a}{2}$ khi $x \to a$.

$= \lim\limits_{x\to a} \cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right) = \cos a.$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}\ln 3} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}\ln 3}{x}$ vì $e^{\sqrt{x}\ln 3} - 1 \sim \sqrt{x}\ln 3$ khi $x \to 0$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln 3}{\sqrt{x}} = +\infty.$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x - 1).\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(2x)^2}{2}.\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}.$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x-1).\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(2x)^2}{2}.\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}.$

Chú ý: ta sử dụng $1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2}$ khi $x \to 0$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x - 1).\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(2x)^2}{2}.\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

Chú ý: ta sử dụng $1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2}$ khi $x \to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x - 1).\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(2x)^2}{2}.\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}.$

Chú ý: ta sử dụng $1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2}$ khi $x \to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Chú ý: ta sử dụng $\tan x \sim x$ khi $x \to 0$.

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x-1).\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(2x)^2}{2}.\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}.$

Chú ý: ta sử dụng $1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2}$ khi $x \to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Chú ý: ta sử dụng $\tan x \sim x$ khi $x \to 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{4+\ln x}.\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{\frac{4}{\ln x}+1}} = e^3.$

2.6. Khái niệm vô cùng bé (VCB)

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x-1).\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(2x)^2}{2}.\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

Chú ý: ta sử dụng $1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2}$ khi $x\to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\cot^2 x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Chú ý: ta sử dụng $\tan x\sim x$ khi $x\to 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{4+\ln x}.\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{\frac{4}{\ln x}+1}} = e^3$.

Chú ý: ta sử dụng công thức $a^b = e^{b\ln a}$ cho giới hạn $\lim[u(x)]^{v(x)}$ nếu nó không có dạng 1^∞.

Nội dung

3. Hàm số liên tục

3. Hàm số liên tục

a) Chú ý: Hàm số có công thức khác nhau với $x < a$ và $x > a$

Nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại và bằng L.

3. Hàm số liên tục

a) Chú ý: Hàm số có công thức khác nhau với $x < a$ và $x > a$

Nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tồn tại và bằng L.

Ví dụ 3.1. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & \text{với } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

. Tính $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3. Hàm số liên tục

a) Chú ý: Hàm số có công thức khác nhau với $x < a$ và $x > a$

Nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại và bằng L.

Ví dụ 3.1. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & \text{với } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

. Tính $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}.$

3. Hàm số liên tục

a) Chú ý: Hàm số có công thức khác nhau với $x < a$ và $x > a$

Nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại và bằng L.

Ví dụ 3.1. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & \text{với } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{với } x > 0 \end{cases}. \text{ Tính } \lim_{x\to 0} f(x).$$

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$
- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - 1^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

3. Hàm số liên tục

3. Hàm số liên tục

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Hàm số liên tục

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. Hàm số liên tục

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}.$

b) Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu $\begin{cases} i)\ \ f(a) \text{ xác định và} \\ ii)\ \lim\limits_{x \to a} f(x) \text{ tồn tại} \\ iii)\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a). \end{cases}$

3. Hàm số liên tục

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}.$

b) Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu $\begin{cases} i)\ f(a) \text{ xác định và} \\ ii)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \text{ tồn tại} \\ iii)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a). \end{cases}$

Ví dụ 3.2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sin^2 x} & \text{với} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \arccos x & \text{với} \quad x \geq 0 \end{cases}$$ tại $x = 0$.

3. Hàm số liên tục

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sin^2 x}$

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1}^2 - \cos^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)}$$

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1}^2 - \cos^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)}$$

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1}^2 - \cos^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x} = 1$$

3. Hàm số liên tục

- Ta có $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
- $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1}^2 - \cos^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x} = 1\end{aligned}$$

  Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại. Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 0$.

Mô-đun: Hàm số, Giới hạn và Hàm số liên tục.

Hết.